APRIL/MAY 2023

CMA52/BMA52/UMA52 — REAL ANALYSIS – I

Arts and Science College (Co-Ed.) Library
Tiruvannamalai.
Pin: 606 603.

Time : Three hours   Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define : Countable set.

   வரையறு : எண்ணிடத்தக்க கணம்

2. Define : Convergent sequence.

   வரையறு : ஒருங்கு வரிசை

3. Define : Monotore sequence.

   வரையறு : ஒரு போக்கு வரிசை

4. Define : Bounded sequence.

   வரையறு : வரம்புள்ள தொடர்

5. Give an example of Alternating Series.

   ஒன்றுபட்ட தொடருக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு தருக.

6. State Comparison Test.

   ஒப்பீட்டுச் சோதனையைக் கூறுக.

7. Define the class l^2.

   வரையறு : l^2 தொகுதி.

4402

8. Define : Metric space.

வரையறு: யாப்பு வெளி

9. Define : continuous function.

வரையறு: தொடர்ச்சியான சார்பு

10. Define : Closed set.

வரையறு: அடைவுற்ற கணம்

Shanmuga Industries Arts and Science College (Co-Ed.) Library
Tiruvannamalai.
Pin: 606 603.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If $A_1, A_2, \ldots$ are countable sets, then prove that $\bigcup_{n=1}^{\infty} An$ is countable.

$A_1, A_2, \ldots$ என்பவை எண்ணிடத்தக்க கணங்கள் எனில் $\bigcup_{n=1}^{\infty} An$ என்பது எண்ணிடத்தக்கது என நிறுவுக.

Or

(b) If $\{S_n\}_{n=1}^{\alpha}$ is a sequence of non negative numbers and if $\lim_{n\to\infty} S_n = L$, then prove that $L \geq 0$.

$\{S_n\}_{n=1}^{\alpha}$ என்பது குறையற்ற எண்களின் தொடர் மற்றும் $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ எனில், $L \geq 0$ என நிறுவுக.

19. State and prove minkowski's inequality.

மின்கௌஸ்கியின் சமனின்மையை கூறி நிறுவுக.

20. If $f : m_1 \to m_2$ is continuous iff the inverse image of every open set is open.

$f : m_1 \to m_2$ என்பது தொடர்ச்சியானதாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை ஒவ்வொரு திறந்த கணத்தின் நேர்மாற்று பிம்பமும் திறந்தது என நிறுவுக.

Shanmuga Industries Arts and Science College (Co-Ed.)
Tiruvannamalai.
Pin: 606 603.

12. (a) Show that $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = \frac{3}{5}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = \frac{3}{5}$ எனக் காட்டுக.

Or

(b) If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a convergent sequence of real numbers, then show that $\lim_{n\to\infty} \sup S_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மெய் எண்களின் ஒருங்கும் தொடர் எனில் $\lim_{n\to\infty} \sup S_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ என நிறுவுக.

13. (a) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ is divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ என்ற தொடர் விரியும் எனக் காட்டுக.

Or

(b) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series then prove that $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது ஒருங்கும் தொடர் எனில் $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ என நிறுவுக.

14. (a) State and prove Schwartz inequality.

ஷ்வார்ஸின் சமனின்மையை எழுதி நிறுவுக.

Or

(b) If $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a non increasing sequence of positive numbers and if $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ convergence, then prove that $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மிகை எண்களின் பெருகாத தொடர் மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ ஒருங்கும் எனில் $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$ என நிறுவுக.

15. (a) Let $\langle m_1, p_1\rangle, \langle m_2, p_2\rangle, \langle m_3, p_3\rangle$ be metric spaces and let $f : m_1 \to m_2$, $g : m_2 \to m_3$. If f is continuous at $a \in m$, and g is continuous at $f(a) \in m_2$, then prove that $g \circ f$ is continuous at a.

$\langle m_1, p_1\rangle, \langle m_2, p_2\rangle, \langle m_3, p_3\rangle$ என்பன யாப்பு வெளிகள் மற்றும் $f : m_1 \to m_2$, $g : m_2 \to m_3$ என்க. f என்பது $a \in m_1$-ல் தொடர்ச்சியானது மற்றும் g என்பது $f(a) \in m_2$-ல் தொடர்ச்சியானது. எனில் $g \circ f$ என்பது a-ல் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

Or

(b) If G_1 and G_2 are open subsets of the metric space m, then prove that $G_1 \cap G_2$ is also open.

G_1 மற்றும் G_2 என்பவை m என்ற யாப்பு வெளியின் திறந்த உட்கணங்கள் எனில் $G_1 \cap G_2$ என்பதும் திறந்தது என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Prove that [0,1] is uncountable.

[0,1] என்பது எண்ணிடத்தக்கது அல்ல என நிறுவுக.

17. If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a cauchy sequence of real numbers then prove that $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மெய் எண்களின் காஷி தொடர் எனில் $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது ஒருங்கும் என நிறுவுக.

18. If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely, then prove that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ தனியாக ஒருங்கும் எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒருங்கும் என நிறுவுக.